NAIHUO CAILIAO /耐火材料 2003,37(6)326~329

不定形耐火材料颗粒级配的优化

□ 宫 波[1,2] 李拴生[2] 侯再恩[1]

1)西安交通大学理学院 西安 710049

2)太钢(集团)耐火材料公司

摘 要 针对生产实际情况,结合紧密堆积理论,建立了在给定的条件下如何选取最优配比的优化模型,并求解最优配比。通过将所配出坯料的粒度分布和按照经验配比给出的坯料的粒度分布与紧密堆积时(Dinger - Funk 方程)的粒度分布进行比较,说明按最优配比配出的坯料,其粒度分布与紧密堆积时的粒度分布接近程度较好。

关键词 紧密堆积,级配,优化模型,不定形耐火材料

在不定形耐火材料生产中,配料是关键的工序之一,它直接影响产品的质量。影响该工序的因素很多。对于一定的粉碎好的原料,如何选取级配,即如何对原料进行分级与如何选取配比是配料工序最基本的问题。实践表明,只有选取可以使坯料达到紧密堆积的级配,才有可能生产出高质量的产品。而在实际生产中,粉碎好的原料的分级、配比还受实际条件和工艺要求的限制。因此,问题转化为如何选取配比,使得可以在满足实际要求的前提下使坯料达到紧密堆积。本文针对生产实际情况,结合紧密堆积理论,建立如何分级和选取配比的一种优化模型,来解决该问题。

1 紧密堆积理论与基本优化模型

1.1 紧密堆积理论概述及建模思路

关于耐火材料配料中颗粒的尺寸与可以达到的堆积的紧密度(即体积密度)的关系的研究,即紧密堆积理论的研究,始于20世纪二、三十年代,得到了一系列理想状态下的理论模型[1,2],一般可分为两类,即粒径是离散的和粒径是连续的模型。而与耐火材料实际生产较接近的理论模型为 Dinger - Funk 方程:

$$\frac{CPFT}{100}=\frac{D^{f\lg R}-D_{s}^{f\lg R}}{D_{L}^{f\lg R}-D_{s}^{f\lg R}} \qquad (1)$$

式中:D 表示颗粒的粒径;D_s 表示原料中的最小粒径;D_L 表示原料中的最大粒径;$f=1/(\lg D_r)$,其中 D_r 表示相邻筛网的直径比,在$\sqrt{2}$筛网系列中为$\sqrt{2}$;R 表示通过相邻两筛孔的颗粒量之比,在标准筛系列,通过任何相邻筛孔的量的比为常数;$CPFT$ 表示粒径 $\leqslant D$ 的颗粒累计百分数(质量分数或体积分数)。

式(1)是在假定粒径是连续分布的情况下,颗粒形状看为球状的情形,达到理想紧密堆积的状态,不同粒径颗粒的累计百分数的理论分布。这里的分级理解为是用不同的筛系列来进行的。按照式(1),分级越细,越易进行配料,而这在实际生产中是不可能的。这是由于分级越多,成本也越高。实际生产工艺只能进行少数的分级,一般不超过5级。而且由于原料的结构和用于粉碎的生产设备及工艺的影响,粉碎好的原料颗粒的形状不是球状,有的与球状还相差很远,这样直接用式(1)就不能得到想要的结果。所以,必须根据实际情况对式(1)进行适当的调整,然后利用调整后的结果建立实际生产的实用模型。下面就按这个思路建立最优配比的优化模型。

1.2 最优配比的优化模型

1.2.1 紧密堆积理论模型的调整

为了更好地反映颗粒形状对紧密堆积时的颗粒粒径的百分数的影响,对粉碎好的原料引入其形状调整因子 $\mu=\mu(D)$,满足:

$$\frac{D_l\cdot D_w}{\mu(D)\cdot D_m^2}=1$$

其中:$D_m=D$,表示颗粒的粒径;D_l 和 D_w 分别表示粒径为 D 的颗粒在垂直于粒径方向的最大截面的

* 宫波:男,1957年生,硕士研究生,高级工程师。

收稿日期:2003-05-08

修回日期:2003-06-16 编辑:柴剑玲

长和宽的平均值。由于在实际生产中，同一种原料在一定的粉碎工艺下得到的粉碎好的原料的形状基本一致。所以，此时可假定其形状调整因子为常数。这样就把式(1)调整为：

$$\frac{CPFT}{100}=\frac{D^{f\mu \lg R}-D_s^{f\mu \lg R}}{D_L^{f\mu \lg R}-D_s^{f\mu \lg R}} \tag{2}$$

显然，颗粒的形状为球状，则 $\mu=1$，式(2)即为式(1)；而颗粒的形状不为球状，则 $\mu<1$，由式(2)知，大粒径颗粒有所减少，相应的小粒径颗粒有所增加。这与实际情况基本一致。为了方便记忆，设 $V_D=D^{f\mu \lg R}-D_s^{f\mu \lg R}$，$V=D_L^{f\mu \lg R}-D_s^{f\mu \lg R}$。则(2)式可表示为：

$$\frac{CPFT}{100}=\frac{V_D}{V}$$

1.2.2　最优配比模型

(1)模型假设：1)实际生产的原料在粉碎工艺下得到的粉碎好的原料其形状基本一致，可视为球体，即 $\mu=\mu(D)$；2)粉碎好的原料颗粒粒度分布为连续的，分布在区间 $[0,c]$ 上，其分布函数 $F(D)$ 为粒径 $\leqslant D$ 的颗粒的量所占的百分数(按体积或质量)，分布密度为 $f(D)=F'(D)$，$D\in[0,c]$($f(D)$ 相当于粒度分布的概率密度)。

(2) 最优配比模型：假设把粉碎好的原料分为 k 级：$0\sim c_1, c_1\sim c_2, \Lambda, c_{k-1}\sim c_k=c$；假设由各级取出的量(颗粒的总数)分别为：$x_1, x_2, \Lambda, x_{k-1}, x_k$，$CPFT^1$ 表示取出的原料配成的坯料中粒径 $\leqslant D$ 的颗粒累计百分数，则有：

$$\frac{CPFT^1}{100}=\frac{W_D}{W}$$

其中，W_D 表示取出的原料配成的坯料中粒径 $\leqslant D$ 的颗粒的总量，W 表示取出的原料配成的坯料的总量。因此，有：

$$W_D=\sum_{i=1}^{k_D}x_i\int_{c_{i-1}}^{c_i}\frac{4\pi(\frac{D}{2})^3}{3}\cdot f(D)\mathrm{d}D+x_{k_D+1}\cdot\int_{c_{k_D}}^{D}\frac{4\pi(\frac{D}{2})^3}{3}\cdot f(D)\mathrm{d}D,\ c_{k_D}<D\leqslant c_{k_D+1}$$

$$W=\sum_{i=1}^{k}x_i\int_{c_{i-1}}^{c_i}\frac{4\pi(\frac{D}{2})^3}{3}\cdot f(D)\mathrm{d}D$$

由于 $CPFT$ 实质上表示的是紧密堆积时坯料粒径的分布，而 $CPFT^1$ 为实际配出的坯料粒径的分布，要使实际配出的坯料尽可能达到紧密堆积，$CPFT^1$ 必须与 $CPFT$ 充分靠近。因此，有下列优化模型：

$$\min_x z=\int_0^c(CPFT-CPFT^1)^2\mathrm{d}D$$
$$\text{s.t. } x=(x_1,x_2,\Lambda,x_k)\geqslant 0$$
$$c_i\in[0,c]$$

因为是要一个函数向另一个函数逼近，这里两个函数之差的平方再积分是完全必要的，且实际生产中分级不会太多，即分级数 $k\leqslant K_0$，所以实际模型应为：

$$\min_x z=\int_0^c(CPFT-CPFT^1)^2\mathrm{d}D$$
$$\text{s.t. } x=(x_1,x_2,\Lambda,x_k)\geqslant 0$$
$$c_i\in[0,c],k\leqslant K_0,$$

2　实际情况下的优化模型

实际生产中，由于实际条件和工艺水平的限制，限制了颗粒粒度的分级。此时，分级数 $k=K_0$ 及 $c_i=(i=0,1,2,\Lambda,k)$ 都为已知的，则此时模型为：

$$\min_x z=\int_0^c(CPFT-CPFT^1)^2\mathrm{d}D$$
$$\text{s.t. } x=(x_1,x_2,\Lambda,x_k)\geqslant 0$$

其中 $k=4$，分级为(mm)：$0\sim1, 1\sim3, 3\sim5, 5\sim8$；$c_0=0, c_1=1, c_2=3, c_3=5, c_4=8$。

3　模型的求解

3.1　模型的化简

由于：

$$\min_x z=\int_0^c(CPFT-CPFT^1)^2\mathrm{d}D=\int_0^c(\frac{V_D}{V}-\frac{W_D}{W})^2\mathrm{d}D=\frac{1}{V^2}\int_0^c(V_D-\frac{V}{W}W_D)^2\mathrm{d}D$$

且 $\frac{1}{V^2}$ 是与 x 无关的正常数，所以只需求出上式后一因子的最小值即可。又有 W 在数值上应等于实际生产中需要配制的坯料的总量，而这个量是已知的，记为 W_0，则有 $\frac{V}{W}=\frac{V}{W_0}=v$ 为已知常数。因此，原模型可简化为：

$$\min_x z=\int_0^c(V_D-vW_D)^2\mathrm{d}D=\sum_{i=1}^{k}\int_{c_{i-1}}^{c_i}(V_D-vW_D)^2\mathrm{d}D$$

$$\text{s.t. } W = W_0, x \geqslant 0$$

3.2 优化模型的求解算法

依据实际情况，粉碎好的颗粒的体积可以认为是服从均匀、连续分布的，则其粒径的分布密度为：

$$f(D) = \frac{3}{512}D^2 \qquad (0 \leqslant D \leqslant c)$$

分布模数 $f\mu$ lg $R = 0.37$, $D_L = D_0 = 8$, $D_s = \varepsilon$，可取 $W_0 = V$, $v = 1$。此时则有：

$$V_D = D^{f\mu \lg R} - D_s^{f\mu \lg R} = D^{0.37} - D_s^{0.37}$$

$$W_0 = D_L^{f\mu \lg R} - D_s^{f\mu \lg R} = D_L^{0.37} - D_s^{0.37}$$

$$\begin{aligned}
W_D &= \sum_{i=1}^{k_D} x_i \int_{c_{i-1}}^{c_i} \frac{4\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3}{3} \cdot f(D)\,\mathrm{d}D + x_{k_D} \cdot \int_{c_{k_D}}^{D} \frac{4\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3}{3} \cdot f(D)\,\mathrm{d}D, c_{k_D} \leqslant D \leqslant c_{k_D+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k_D} x_i \int_{c_{i-1}}^{c_i} \frac{4\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3}{3} \cdot \frac{3}{512} \cdot D^2\,\mathrm{d}D + x_{k_D} \cdot \int_{c_{k_D}}^{D} \frac{4\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3}{3} \cdot \frac{3}{512} \cdot D^2\,\mathrm{d}D, c_{k_D} \leqslant D \leqslant c_{k_D+1} \\
&= \frac{\pi}{6144}\left(\sum_{i=1}^{k_D} x_i (c_i^6 - c_{i-1}^6) + x_{k_D}(D^6 - c_{k_D}^6)\right), c_{k_D} \leqslant D \leqslant c_{k_D+1} \\
&= \begin{cases}
\frac{\pi}{6144}x_1 D^6, & (0 \leqslant D \leqslant 1) \\
\frac{\pi}{6144}(x_1 + x_2(D^6 - 1)), & (1 < D \leqslant 3) \\
\frac{\pi}{6144}(x_1 + 728x_2 + x_3(D^6 - 729)), & (3 < D \leqslant 5) \\
\frac{\pi}{6144}(x_1 + 728x_2 + 14896x_3 + x_4(D^6 - 15625)), & (5 < D \leqslant 8)
\end{cases}
\end{aligned}$$

$$W = \frac{\pi}{6144}(x_1 + 728x_2 + 14896x_3 + 246519x_4)$$

代入模型，目标函数为：

$$\begin{aligned}
z &= \sum_{i=1}^{k} \int_{c_{i-1}}^{c_i} (V_D - vW_D)^2\,\mathrm{d}D \\
&= \int_0^1 \left(D^{0.37} - D_s^{0.37} - \frac{\pi}{6144}x_1 D^6\right)^2 \mathrm{d}D + \int_1^3 \left(D^{0.37} - D_s^{0.37} - \frac{\pi}{6144}(x_1 + x_2(D^6 - 1))\right)^2 \mathrm{d}D + \\
&\quad \int_3^5 \left(D^{0.37} - D_s^{0.37} - \frac{\pi}{6144}(x_1 + 728x_2 + x_3(D^6 - 729))\right)^2 \mathrm{d}D + \\
&\quad \int_5^8 \left(D^{0.37} - D_s^{0.37} - \frac{\pi}{6144}(x_1 + 728x_2 + 14896x_3 + x_4(D^6 - 15625))\right)^2 \mathrm{d}D
\end{aligned}$$

取 $\varepsilon = 0.00000003$，用 mathematic 4.0 求得：

$$\begin{aligned}
z &= 21.3789 - 0.0122699x_1 + 1.8503 \times 10^{-6}x_1^2 - 7.38202 + 0.00206565x_1x_2 + 0.724738x_2^2 - \\
&\quad 107.79x_3 + 0.0282781x_1x_3 + 20.5865x_2x_3 + 194.705x_3^5 - 512.42x_4 + 0.126313x_1x_4 + \\
&\quad 91.9558x_2x_4 + 1881.56x_3x_4 + 8866.97x_4^2
\end{aligned}$$

因此，模型为：

$$\min_x z$$

$$\text{s.t. } \frac{\pi}{6144}(x_1 + 728x_2 + 14896x_3 + 246519x_4) = D_L^{0.37} - D_s^{0.37}$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \geqslant 0$$

这是一个二次规划模型，用 lingo 4 求得解为：

$$x_1 = 2386.207, x_2 = 0.9393893, x_3 = 0.04264551, x_4 = 0.002079901$$

由此得配比为：

$$x_1\int_0^1 \frac{4\pi(\frac{D}{2})^3}{512}\cdot D^2\mathrm{d}D : x_2\int_1^3 \frac{4\pi(\frac{D}{2})^3}{512}\cdot D^2\mathrm{d}D : x_3\int_3^5 \frac{4\pi(\frac{D}{2})^3}{512}\cdot D^2\mathrm{d}D : x_4\int_5^8 \frac{4\pi(\frac{D}{2})^3}{512}\cdot D^2\mathrm{d}D$$

即 56.57:16.21:15.06:12.16 为所求的最优配比。

3.3 解的实施

在上述求出的解中，x_1 所占的份额由骨料、基质料及添加料三部分构成，其中骨料占 18，基质料即微粉占 22.57，添加料占 16，而 x_2、x_3、x_4所占的份额全部由骨料构成。这样，在实际生产时，可根据上述比例按体积配制，也可按质量配制；但对不同密度的料，应按上述体积比例换算成相应的质量。

4 结论与说明

以在紧密堆积理论基础上建立的 Dinger - Funk 方程为标准，根据粉碎好的料按体积服从均匀分布的实际，建立了求最优配比的优化模型，并在此基础上，求出最优配比为 56.57:16.21:15.06:12.16。按此配比配出的坯料的粒度分布与紧密堆积时的(Dinger - Funk 表示的)粒度分布比较接近，见图 1。而按经验配比 47:18:20:15 配出的坯料的粒度分布与紧密堆积时的(Dinger - Funk 表示的)粒度分布相差较大，见图 2。比较图 1 与图 2 可知，从理论上说，上述最优配比较经验配比的要好一些。

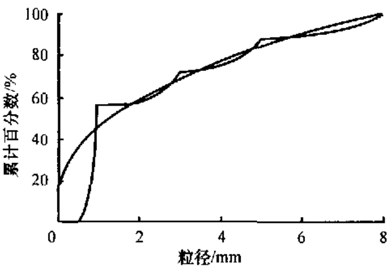

图 1 最优配比的粒度分布与紧密堆积的粒度分布比较
Fig. 1 Comparison of the grain size distributions of optimum grain grading and close packing

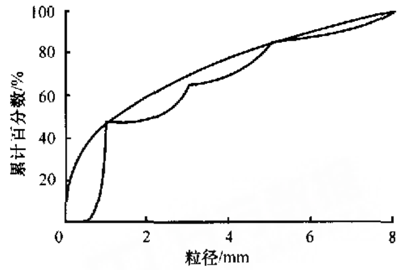

图 2 经验配比的粒度分布与紧密堆积的粒度分布比较
Fig. 2 Comparison of the grain size distributions of experienced grain grading and close packing

对于上述求出的解，需要说明三点：第一，粉碎好的料的分布，这里以经验取为按体积服从连续的均匀分布，实际应用时可以对粉碎好的料进行粒度分析，如可以用标准系列筛进行筛分得到离散的分布，可用数据拟合的方法得到其分布函数；第二，分布模数的选取，这里按一般达到紧密堆积的要求，直接取为 0.37，实际中可以按具体施工要求选取适当的模数；第三，上述模型只是要求紧密堆积下的最优配比，而实际生产中会有各种限制条件与不同的要求，这时只需要把这些限制和要求转化为约束条件，加入上述模型即可求出相应的最优配比。

参考文献

1 刘浩斌. 颗粒尺寸分布与堆积理论. 硅酸盐学报, 1991, 19(2): 164~172

2 李再耕. 不定形耐火材料粒度组成的控制. 国外耐火材料, 1998, 23(5): 3~9

致谢：在本课题的研究过程中，我的导师西安交通大学理学院张可村教授给予了悉心的指导，在此表示衷心的感谢。

Optimization for grain grading of monolithic refractories/Gong Bo, Li Shuansheng, Hou Zai'en//Naihuo Cailiao. -2003, 37(6): 326

The optimization model for how to choose the optimum grain grading under the given conditions was founded in view of actual production situation and in the light of close packing theory, and the optimum grain grading was concluded. By comparing the grain size distribution of the batching obtained by optimum grain grading with the grain size distributions of batchings obtained from experience and Dinger - Funk Equation of close packing, it is shown that the grain size distribution of the batching obtained by optimum grain grading closes with the grain size distribution when close packing.

Key words: Close packing, Grain grading, Optimization model, Monolithic refractories

Author's address: School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China

不定形耐火材料颗粒级配的优化

作者：宫波， 李拴生， 侯再恩
作者单位：宫波(西安交通大学理学院,西安,710049;太钢(集团)耐火材料公司)， 李拴生(太钢(集团)耐火材料公司)， 侯再恩(西安交通大学理学院,西安,710049)
刊名：耐火材料 ISTIC PKU
英文刊名：REFRACTORIES
年，卷(期)：2003,37(6)

参考文献(2条)

1.刘浩斌 颗粒尺寸分布与堆积理论 1991(02)

2.李再耕 不定形耐火材料粒度组成的控制 1998(05)

本文读者也读过(6条)

引证文献(4条)